ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES PARABÓLICAS COMO PROBLEMA DE MOMENTOS

María Beatriz Pintarelli

Grupo de Aplicaciones Matemáticas y Estadísticas de la Facultad de Ingeniería (GAMEFI), Universidad Nacional de La Plata
Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata, Argentina,
mariabea@mate.unlp.edu.ar

Resumen: Se consideran ecuaciones en derivadas parciales del tipo parabólico de la forma $w_t-(w_x)_x = r(x,t)$ bajo las condiciones $w(a_1,t) = k_1(t)$; $w(b_1,t) = k_2(t)$ y $w(x,a_2) = h_1(t)$ sobre una región $E = \{a_1 < x < b_1, t > a_2\}$. Veremos que se puede encontrar una solución aproximada utilizando las técnicas de problema inverso generalizado de momentos y encontrar cotas para el error de la solución estimada.

Palabras claves: *problema de momentos generalizados, estabilidad de la solución, ecuaciones integrales, ecuación parabólica.*
2010 AMS Subjects Classification: 45Qxx – 45Dxx- 45D05- 44A60

1. INTRODUCCIÓN

El problema de momentos generalizados [2], [6] consiste en encontrar una función $f(x)$ sobre un dominio $\Omega \subset R^d$ que satisface la sucesión de ecuaciones

$$\mu_i = \int_\Omega g_i(x) f(x) dx \quad i \in N \tag{1}$$

donde N es el conjunto de los números naturales, (g_i) es una sucesión dada de funciones en $L^2(\Omega)$ linealmente independientes conocidas y la sucesión de números reales $\{\mu_i\}_{i \epsilon N}$ son datos conocidos.

El problema de momentos de Hausdorff [2], [3] es un ejemplo clásico de un problema de momentos, consiste en encontrar una función $f(x)$ en (a,b) tal que

$$\mu_i = \int_a^b x^i f(x) dx \qquad i \epsilon N.$$

En este caso $g_i(x) = x^i$ con *i* perteneciente al conjunto *N*.

Si el intervalo de integración es $(0,\infty)$ se tiene el problema de momentos de Stieltjes; si el intervalo de integración es $(-\infty,\infty)$ se tiene el problema de momentos de Hamburger [2], [3].

El problema de momentos es un problema *mal condicionado* en el sentido que puede no existir solución y de existir no hay dependencia continua sobre los datos dados [2], [6]. Hay varios métodos para construir soluciones regularizadas. Uno de ellos es el método de la *expansión truncada* [6].

Dicho método consiste en aproximar (1) con el problema finito de momentos

$$\mu_i = \int_\Omega g_i(x) f(x) dx \qquad i = 1,2,\dots,n, \tag{2}$$

donde se considera como solución aproximada de $f(x)$ a $p_n(x) = \sum_{i=0}^n \lambda_i \varphi_i(x)$, y las funciones $\varphi_i(x)$ resultan de ortonormalizar $g_1, g_2, \dots, g_n$ siendo λ_i los coeficientes en función de los datos μ_i. En el subespacio generado por $g_1, g_2, \dots, g_n$ la solución es estable. Si $n \in N$ es elegido en forma apropiada entonces la solución de (2) se aproxima a la solución del problema original (1).

En el caso en que los datos $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ sean inexactos se deben aplicar teoremas de convergencia y estimaciones del error para la solución regularizada (pág. 19 a 30 de [6]).

Otro método es el método de Tikhonov (pág. 18 de [6]). En este método se escribe (1) en la forma $Af = \mu$ con

$$Af = \left(\int_\Omega g_1 f, \int_\Omega g_2 f, \dots \right), \qquad \mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$$

y se debe encontrar $f \epsilon L^2(\Omega)$ que satisfaga la ecuación variacional

$$\beta(f,v)_{L^2(\Omega)} + (Af, Av)_{l^2} = (f, Av)_{l^2}, \quad \forall v \in L^2(\Omega),$$

donde $(.,.)_{L^2(\Omega)}$ y $(.,.)_{l^2}$ son los productos internos usuales de $L^2(\Omega)$ y l^2 respectivamente y $\beta > 0$.

2. RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN EN DERIVADAS PARCIALES PARABÓLICA.

Se considera la ecuación en derivadas parciales del tipo parabólico de la forma

$$w_t-(w_x)_x = r(x,t) \tag{3}$$

sobre una región $E = \{a_1 < x < b_1, t > a_2\}$, con $r(x,t)$ conocida, bajo las condiciones de contorno

$$w(a_1,t) = k_1(t) \qquad w(b_1,t) = k_2(t)$$

y

$$w(x,a_2) = h_1(t).$$

Consideramos el campo vectorial $F^* = \big(F_1(w), F_2(w)\big) = (w_x, -w)$, y notemos que $div(F^*) = w_{xx} - w_t = -r(x,t)$.

Tomamos una función auxiliar $u(m,z,x,t) = e^{-(m+1)x-(z+1)t}$.
Entonces

$$\iint_E u\, div(F^*)dA = \iint_E div(u\,F^*)dA - \iint_E F^*.\nabla u dA \tag{4}$$

donde $\nabla u = (u_x\,, u_t)$.
Además

$$\iint_E div(u\,F^*)dA = \iint_E ((uw_x)_x - (u\,w)_t)\;dA = \iint_E u\,div(\,F^*)dA + \iint_E (u_x\,w_x - u_t\,w)\,dA\,. \tag{5}$$

Entonces de (4) y (5) se puede deducir que

$$\iint_E (u_x\,w_x - u_t\,w)\,dA \iint_E F^*.\nabla u dA\,. \tag{6}$$

Por otro lado, luego de realizar varios cálculos, (6) se puede escribir como

$$\int_{a_1}^{b_1} w(x,a_2)u(m,z,x,a_2)\,dx + \frac{z+1}{m+1}\int_{a_2}^{\infty}(w(b_1,t)u(m,z,b_1,t) - w(a_1,t)u(m,z,a_1,t))dt =$$

$$= \frac{z+1}{m+1}\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{\infty} w_x\,(x,t)udtdx - \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{\infty} w_t\,(x,t)udtdx$$

y, si hacemos $z = m$, se llega a

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{\infty} (w_x(x,t) - w_t\,(x,t))u(m,m,x,t)dtdx =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} w(x,a_2)u(m,m,x,a_2)\,dx$$

$$+ \int_{a_2}^{\infty}(w(b_1,t)u(m,m,b_1,t) - w(a_1,t)u(m,m,a_1,t))dt\;\;. \tag{7}$$

El término de la derecha es una expresión conocida que anotamos $\varphi_1(m)$.
Ahora tomamos una base $\{\psi_i(m)\}_i$ de $L^2(a_2,\infty)$ y entonces (7) puede ser transformado en un problema de momentos generalizado al multiplicar ambos miembros de (7) por $\psi_i(m)$ e integrar con respecto a *m*:

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{\infty} (w_x(x,t) - w_t\,(x,t))H_i(x,t)dtdx = \mu_i \qquad\qquad i = 0,1,2,\ldots \tag{8}$$

donde

$$H_i(x,t) = \int_{a_2}^{\infty} u(m,m,x,t)\psi_i(m)dm$$

y los momentos μ_i son

$$\mu_i = \int_{a_2}^{\infty} \varphi_1\,(m)\psi_i(m)dm\,.$$

Aplicamos el método de expansión truncada detallado en [3] y generalizado en [4] y [5] con el fin de encontrar una aproximación $p_n(x,t)$ de $f(x,t) = w_x - w_t$ para el correspondiente problema finito con $i = 0, 1, \ldots, n$; donde *n* es el número de momentos μ_i que se consideran. Para aplicar el método sea $\phi_i(x,t)$ $i = 0, 1, 2$ ... la base obtenida al ortonormalizar $H_i(x,t)$ $\;i = 0,1,2,\ldots,n\;$ y adicionando al conjunto resultante las funciones necesarias hasta alcanzar una base ortonormal.
Mediante el método de la expansión truncada aproximamos la función $w_x - w_t$ con [4] , [5]:

$$p_n(x,t) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i\phi_i(x,t) \qquad \text{donde} \qquad \lambda_i = \sum_{j=0}^{i} C_{ij}\,\mu_j \quad i = 0,1,2,\ldots,n,$$

Y C_{ij} son los coeficientes de una matriz C que verifican

$$C_{ij} = \left(\sum_{k=j}^{i-1}(-1)\frac{\langle H_i\,(x,t)\,|\,\phi_k(x,t)\rangle}{\|\phi_k(x,t)\|^2}C_{kj}\right)\cdot\|\phi_i(x,t)\|^{-1} \qquad 1 < i \le n \;\;;\;\; 1 \le j < i,$$

Y los términos de la diagonal son $\qquad C_{ii} = \|\phi_i(x,t)\|^{-1} \qquad i = 0,1,\ldots,n.$

El siguiente teorema da una cota de la exactitud de la aproximación.
Teorema *Sea el conjunto de números reales* $\{\mu_i\}_{i=0}^{n}$ *y supongamos que* $f(x,t)$ *en* $L^2(E)$ *verifica para algún* n, ε *y* M *(dos números positivos):*

$$\sum_{i=0}^{n}\left|\iint_E H_i\,(x,t)f(x,t)dt - \mu_i\right|^2 \le \varepsilon^2 \qquad y \qquad \iint_E (x\,f_x^{\;2} + t\,f_t^{\;2}\,)\,Exp[x+t]dtdx \le M^2$$

entonces

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{\infty}|f(x,t)-p_n(x,t)|^2\,dtdx \le \|C^TC\|\varepsilon^2+\frac{1}{8(n+1)^2}M^2.$$

Se debe cumplir que

$$t^i f(x,t) \to 0 \quad \text{si} \quad t\to\infty \quad \text{para todo} \quad i\in N\ .▪$$

Si aplicamos el método de expansión truncada para resolver (8), considerando $i = 0,1,2,\dots,n$ obtendríamos una aproximación $p_n(x,t)$ para $f(x,t) = w_x - w_t$.
Se tiene entonces una ecuación en derivadas parciales de primer orden de la forma

$$w_x - w_t = p_n(x,t).$$

Esta ecuación se resuelve con el método detallado en [1], es decir, se puede probar que resolver esta ecuación es equivalente a resolver la ecuación integral

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{\infty} u(m,z,x,t)\ w(x,t)(t-x)dtdx = \varphi_2(m,z) \qquad (9)$$

donde

$$\varphi_2(m,z) = \int_{a_2}^{\infty}(u(m,z,b_1,t)w(b_1,t) - u(m,z,a_1,t)w(a_1,t))dt -$$
$$- \int_{a_1}^{b_1} u(m,z,x,a_2)w(x,a_2)\,dx - \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{\infty} u(m,z,x,t)p_n(x,t)dtdx$$

y $u(m,z,x,t) = e^{-(m+1)(x+1)-(z+1)(t+1)}$. Se multiplican ambos miembros de (9) por las funciones de una base $\{\psi_{ij}(m,z)\}_{ij}$ de $L^2(E)$ e integramos con respecto a m y z. Entonces (9) puede ser transformado en un problema de momentos generalizado. Considerando el correspondiente problema de momentos finito se aplica el método de expansión truncada y encontramos una solución aproximada para $w(x,t)$.

3. EJEMPLO NUMÉRICO

Se considera la ecuación

$$w_{xx}(x,t) - w_t(x,t) = \frac{1+Exp[-x-t](1+t^2(2+xExp[x])}{1+t^2}$$

y condiciones

$$w(0,t) = Exp[-t]\ ; \qquad w(1,t) = (Exp[-1]+1)Exp[-t]$$
$$w(x,0) = x + Exp[-x].$$

1º Paso: se aproxima $f(x,t) = w_x(x,t) - w_t(x,t)$.
Se toma la base $\psi_i(m) = m^{i-1}\,Exp[-m] \quad i = 1,\dots,5$.
Teniendo en cuenta el Teorema anterior calculamos la exactitud:
$\int_0^1\int_0^{\infty}|f(x,t)-p_5(x,t)|^2\,dtdx = 0.409962$ como una forma de comparar $f(x,t)$ y $p_5(x,t)$ [3].
Se ilustra en la Figura 1 la solución exacta y la solución aproximada.

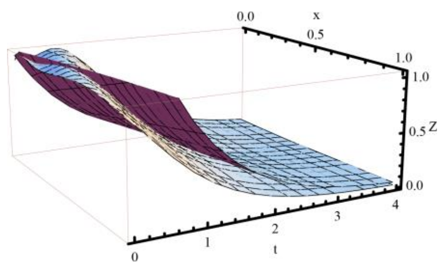

Figura 1

2º Paso: se aproxima $w(x,t)$.
Se toma la base $\psi_{ij}(m,z) = m^{i-1}\,z^{j-1}Exp[-m-z] \quad i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3$.
Nuevamente teniendo en cuenta el Teorema anterior calculamos la exactitud:
$\int_0^1\int_0^{\infty}|w(x,t)-p_9(x,t)|^2\,dtdx = 0.131406$ como una forma de comparar $w(x,t)$ y $p_9(x,t)$ [3].
En la Figura 2 se observan la solución exacta y la solución aproximada.

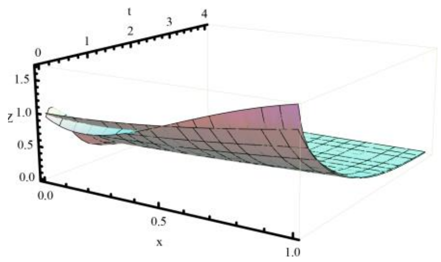

Figura 2

4. Conclusiones

Una ecuación en derivadas parciales parabólica de la forma $w_t - (w_x)_x = r(x,t)$ bajo las condiciones

$$w(a_1,t) = k_1(t) \qquad w(b_1,t) = k_2(t)$$
$$w(x,a_2) = h_1(t)$$

sobre una región $E = \{a_1 < x < b_1, t > a_2\}$, se puede resolver en forma aproximada en dos pasos: primero se considera la ecuación integral

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{\infty} e^{-m(x+t)} \left(w_x(x,t) - w_t(x,t)\right)dtdx = \varphi_1(m) \qquad \varphi_1(m) \text{ conocida.}$$

Se la transforma en un problema de momentos generalizados, y luego mediante el método de la expansión truncada se obtiene una solución aproximada para $w_x(x,t) - w_t(x,t)$. En un segundo paso se considera la ecuación integral

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{\infty} e^{-(m+1)(x+1)-(z+1)(t+1)}\, w(x,t)(t-x)dtdx = \varphi_2(m,z) \qquad \varphi_2(m,z) \text{ conocida.}$$

Se la transforma en un problema de momentos generalizados, y nuevamente aplicamos el método de la expansión truncada para obtener una solución aproximada para $w(x,t)$. Se observa que no se utiliza en los cálculos a la función $r(x,t)$, pero está implícitamente considerada en las condiciones de contorno. De esta forma sería posible resolver, por ejemplo, el problema de hallar $w(x,t)$ tal que satisfaga la ecuación

$$w_t - (w_x)_x = p(t)w(x,t) + \Phi(x,t)$$

bajo las condiciones

$$w(0,t) = k_1(t) \qquad w(1,t) = k_2(t)$$

$$w(x,0) = h_1(t)$$

sobre una región $E = \{0 < x < 1, t > 0\}$, con $p(t)$ desconocida y $\Phi(x,t)$ conocida.

Referencias

[1] M. B. PINTARELLI, *Linear parcial differential equations of first order as bi-dimensional inverse moments problem*, Applied Mathematics, Vol.6 Number 6 (2015), pp. 979-989. (Publicación Online, disponible en http://www.scirp.org/journal/AM/)

[2] J.A. SHOHAT and J.D. TAMARKIN, *The problem of Moments*, Mathematic Surveys, Am. Math. Soc., Providence, RI, 1943.

[3] G. TALENTI, *Recovering a function from a finite number of moments,* Inverse Problems 3 (1987), pp.501- 517.

[4] M. B. PINTARELLI and F. VERICAT, *Bi-dimensional inverse moment problems*, Far East Journal of Mathematical Sciences 54 (2011), pp. 1-23.

[5] M. B. PINTARELLI and F. VERICAT, *Stability theorem and inversion algorithm for a generalized moment problem*, Far East Journal of Mathematical Sciences 30 (2008), pp. 253-274.

[6] D.D. ANG, R. GORENFLO, V.K. LE and D.D. TRONG, *Moment theory and some inverse problems in potential theory and heat conduction*, Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2002.